Komplexe Analysis für die Oberstufe

Georgi Kocharyan

18. August 2022

Zusammenfassung

Diese wenigen Seiten sind als knappe Einführung in die komplexe Analysis ohne mehr Vorwissen als Ableiten, Integrieren und Grundwissen zu komplexen Zahlen gedacht. Primäre Verwendung ist der Komplexe-Analysis-Zirkel im Augsburger Mathecamp 2022.

Einführung

Der Auftakt der komplexen Analysis entsteht aus einer einfachen Frage – wann ist eine komplexe Funktion f, also $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, differenzierbar? Diese scheinbar simple Frage ist komplexer als gedacht (pun intended) und führt zu vielen wunderschönen Ergebnissen über die seltsamen Eigenschaften der komplex differenzierbaren Funktionen.
Wir wissen ja, dass man $\mathbb{C}$ schön als eine Ebene (das *Argand-Diagramm*) darstellen kann, also kann man sich eine solche Funktion f auch als Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vorstellen.

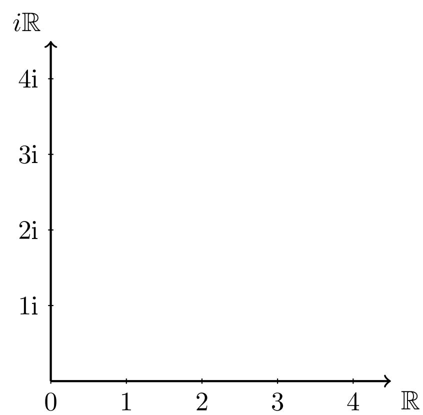

Abbildung 1: Das Argand-Diagramm zur anschaulichen Darstellung der komplexen Zahlen

Formell aufgeschrieben: Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Zahl $x + iy$ auf $u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ schickt, dann schickt $\tilde{f}$ den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$. Und in die umgekehrte Richtung kann man auch gehen, es besteht also eine *Korrespondenz* zwischen komplexen Funktionen und zweidimensionalen reellwertigen.
Unabhängig von dieser Überlegung übertragen wir die bekannte Definition von Differenzierbarkeit auf $\mathbb{C}$.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar bei a, wenn der Limes

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert.

Und wann ist denn eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar? Diese Frage ist ein wenig komplizierter und wir werden uns das nicht so genau anschauen. Es reicht, uns folgende Punkte klarzumachen.

- Die oben so genannte Funktion $\tilde{f}$ ist genau dann an einem Punkt differenzierbar, wenn u und v dort differenzierbar sind.

- Die Ableitung von u an einem Punkt besteht aus *zwei* Zahlen, die jeweils die Ableitungen in eine der beiden Richtungen angeben.
- Wenn $u(x, y)$ seperat in x und y differenzierbar ist, folgt NICHT im Allgemeinen die Differenzierbarkeit von u! Polynome aber zum Beispiel sind immer differenzierbar.

Als Anmerkung: Diese Definition ist eher leicht nachzurechnen, unterscheidet sich in Grunde nicht wirklich vom eindimensionalen Fall und viele der Eigenschaften übertragen sich.
Nun haben wir alle gerade wohl einen sehr verlockenden Gedanken! Ist eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vielleicht genau dann in a differenzierbar, wenn die entsprechende Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dort differenzierbar ist? Wenn ja, dann können wir unsere Sachen packen und nach Hause gehen – über die Differenzierbarkeit von reellen Funktionen wissen wir ja genug.
Als schlaue Mathematiker*innen hinterfragen wir jedoch solche steilen Thesen, vielleicht überprüfen wir das doch anhand eines Beispiels.

Sind wir vielleicht schon fertig?

Okay, legen wir los: Nehmen wir mal die komplexe Funktion $f(z) = z^2$. Die korrespondierende reellwertige Funktion ergibt sich aus

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2,$$

also haben wir

$$\tilde{f}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Wie oben angemerkt ist das überall differenzierbar, weil die Komponenten Polynome sind. Übungsaufgabe: Rechne nach, dass f auch als komplexe Funktion differenzierbar ist.
Okay, Glück gehabt. Hier eine andere Funktion: $f(z) = \overline{z}$. Da diese Funktion z komplex konjugiert, also $x+iy$ auf $x - iy$ abbildet, haben wir

$$\tilde{f}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Diese Funktion ist wie oben auch überall reell differenzierbar. Nun überprüfen wir doch mal, ob f in 0 komplex differenzierbar ist. Hierfür müsste ja, siehe oben, der Limes

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z} - \overline{0}}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$$

existieren. Das würde bedeuten, dass für alle z, die nahe genug an 0 sind, $\frac{\overline{z}}{z}$ sich an einen Wert annähert. Es gibt aber sehr viele Wege, solche z auszuwählen.

- Wir könnten uns reelle z anschauen. In diesem Fall ist $\overline{z} = z$ und wir nähern uns 1 an.
- Wir könnten uns rein imaginäre z anschauen. Hier ist $\overline{z} = -z$ und wir nähern uns -1 an.

Schock! Die Funktion $\overline{z}$ ist also an der Stelle $z = 0$ *nicht* komplex differenzierbar, aber reell schon. Es wird also klar, dass noch viel zu tun ist!

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und wir schreiben $f = u + iv$. Klar ist also, dass die Differenzierbarkeit von u und v als reelle Funktionen nicht ausreicht, um zu folgern, dass f komplex differenzierbar ist. Es wäre doch schön, falls wir das doch irgendwie hinkriegen könnten! Die *Cauchy-Riemann-Gleichungen* geben uns ein starkes Werkzeug in die Hand, um einer Funktion ansehen zu können, ob sie nicht doch diese Eigenschaft erfüllt.

Theorem. Wenn f in $x + iy$ komplex differenzierbar ist, dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Beweis. Was uns vorhin im Falle von $f(z) = \overline{z}$ so geärgert hat, soll uns hier inspirieren. Das Problem war ja gewesen, dass wenn wir uns von Osten/Westen angenähert haben, der Limes etwas anderes ausgespuckt hatte als von Norden/Süden. In diesem Fall wissen wir, dass f komplex differenzierbar ist, also dass beide Herangehensweisen dasselbe Ergebnis haben sollten.

- Wir nähern uns von Westen an. (Informell: $h = t$ ist reell)

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+iy+h)-f(x+iy)}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{u(x+t,y)+iv(x+t,y)-(u(x,y)+iv(x,y))}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x+t,y)-u(x,y)}{t} + i\cdot \lim_{t\to 0} \frac{v(x+t,y)-v(x,y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

- Wir nähern uns von Norden an. (Informell: $h = it$ ist rein imaginär)

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+iy+h)-f(x+iy)}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{u(x,y+t)+iv(x,y+t)-(u(x,y)+iv(x,y))}{it} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{it} + \lim_{t\to 0} \frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{t} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Und die Behauptung folgt, da diese beiden komplexen Zahlen gleich sind! □

Aber das ist ja noch nicht die ganze Geschichte – wer aufgepasst hat, hat gesehen, dass dieser Satz falsch herum ist! Wir können ihn nur anwenden, wenn wir schon wissen, dass f komplex differenzierbar ist. Glücklicherweise gilt die Rückrichtung aber auch, und das folgt tatsächlich schon wenn wir in unserem Beweis ein bisschen sorgfältiger sind (aber das werden wir hier nicht machen).

Theorem. Wenn u, v selber in a reell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen, ist f in a komplex differenzierbar.

Damit haben wir die Gestalt von komplex differenzierbaren Funktionen zumindest ein bisschen eingefangen. f ist in a holomorph, wenn f in einer Umgebung um a überall komplex differenzierbar ist. Es gelten für diese Funktionen erstaunliche Resultate, die im Reellen kein bisschen wahr sind:

- Eine überall auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion heißt *ganz.* Jede (nicht konstante) ganze Funktion ist unbeschränkt! (Auf $\mathbb{R}$ falsch, siehe Sinus)
- Eine in a holomorphe Funktion ist automatisch nicht nur einmal, nicht nur zweimal, sondern gleich unendlich oft differenzierbar. (Auch auf $\mathbb{R}$ falsch, finde ein Beispiel!)
- Unter bestimmten Umständen ist das Integral einer holomorphen Funktion auf einer geschlossenen Kurve immer gleich Null!
- Eine holomorphe Funktion hat nie ein lokales Maximum (außer eventuell am Rand seines Definitionsbereichs)

Erstmal ein paar Übungsaufgaben.

1. Welche der folgenden Funktionen sind wo komplex differenzierbar, wo holomorph?
   - $f(z) = |z|^2$
   - $g(z) = \mathrm{Im}(z)$
2. Zeige, dass $\frac{z^5}{|z|^4}$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen bei 0 erfüllt, dort aber nicht komplex differenzierbar ist. (Wie kann das sein?)
3. Bestimme die komplex differenzierbaren Funktionen, die als Realteil folgende reellen Funktionen haben.
   - xy
   - $\log x^2 + y^2$
   - $x^3 - 3xy^2$
   - $e^{y^2-x^2} \cos 2xy$

Satz von Liouville

Wie versprochen beweisen wir jetzt, dass jede ganze Funktion unbeschränkt ist. Das folgt aus der *Integralformel von Cauchy,* die wir ohne Beweis zitieren – intuitiv gesehen sagt dieser Satz, dass wenn wir die Werte einer holomorphen Funktion auf einem Kreis kennen, wir automatisch auch alle innendrin wissen!

Anmerkung. Wenn M eine Teilmenge der komplexen Zahlen ist, schreiben wir ∂M für den Rand dieser Menge.

Theorem (Integralformel von Cauchy)**.** Sei f holomorph auf $D = D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$. Dann gilt für alle $r < R$ und alle $w \in D(a, r)$ die Formel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z - w} \mathrm{d}z.$$

Beachte, dass man ein solches Integral ausrechnen kann mit dem Trick $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$, wobei die Kurve mit t parametrisiert ist.
Dieses Resultat ist eigentlich sehr unerwartet! Es reicht also für eine holomorphe Funktion, nur eine kleine, eindimensionale Anzahl an Werten zu kennen, um alle anderen im Inneren auszurechnen. Das nutzen wir jetzt aus, um im Limes $R \to \infty$ einen Widerspruch zur Beschränktheit einer holomorphen Funktion zu bekommen.

Definition. Eine ganze Funktion nennen wir *beschränkt,* wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt sodass $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq M$.

Theorem (Liouville)**.** Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und beschränkt. Wir zeigen, dass für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt, dass $f(0) = f(w)$. Für dieses beliebige w wähle $R > |w|$.

$$\begin{aligned}|f(w) - f(0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D(a,R)} \left(\frac{f(z)}{z - w} - \frac{f(z)}{z}\right) \mathrm{d}z \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D(a,R)} \frac{w f(z)}{z(z - w)} \,\mathrm{d}z \right| \\ &\leq \frac{|w|}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \sup_{D(a,R)} \left|\frac{f(z)}{z(z - w)}\right| \leq |w| \cdot \sup_{D(a,R)} \left|\frac{f(z)}{z - w}\right| \leq \frac{|w|}{R - |w|} \cdot \sup_{D(a,R)} |f(z)|\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, weil Beträge ja nichtnegativ sind, aber der Wert hier für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert. □

Eine interessante Folgerung aus dem Satz von Liouville als Übungsaufgabe: Beweise, dass jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle hat (Fundamentalsatz der Algebra).