Kettenbrüche für die Oberstufe

Georgi Kocharyan

14. August 2023

Zusammenfassung

Diese wenigen Seiten sind als knappe Einführung in Kettenbrüche und ihre Anwendungen gedacht. Es ist kein besonderes Vorwissen nötig. Primäre Verwendung ist der Kettenbrüche-Zirkel im Augsburger Mathecamp 2022.

1 Einführung

Wir wissen ja, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Lasst uns versuchen, die Zahl mit rationalen Zahlen anzunähern. Wie könnte man hier vorgehen? Wir versuchen, eine schlechte Annäherung zu nehmen und sie Schritt für Schritt besser zu machen. Fangen wir an mit $1 \approx \sqrt{2}$. Wie groß ist der Fehler?

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$

Der Fehler ist zwar keine rationale Zahl, aber wir versuchen erneut, es mit einer anzunähern. Wir wollen dafür einen Stammbruch nehmen, also betrachten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = 2 + (\sqrt{2}-1) \approx 2$$

Also ist der Kehrwert ungefähr 2. Damit gelangen wir zu der nächsten Näherung

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\sqrt{2}-1} \approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Es geht weiter, in dem wir wieder versuchen, den Fehler in dem Nenner durch einen Stammbruch zu ersetzen. Aber der Fehler ist $\sqrt{2}-1$, was schonmal vorgekommen ist - wir ersetzen es durch $\frac{1}{2}$. Wenn wir diese Prozedur $n-$mal durchführen (und wir wissen auch schon wie, weil in jedem Schritt dasselbe passiert!), bekommen wir die folgende Aussage:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2}}}}$$

Wir können die Ergebnisse der einzelnen Schritte auch ausmultiplizieren – dann bekommen wir eine Folge an rationalen Zahlen, die Annäherungen für $\sqrt{2}$ sind.

$$\sqrt{2} \approx 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}$$

Eigentlich ist uns intuitiv klar, dass diese Annäherungen immer besser werden, aber das gehört sauber bewiesen. Wir werden aber noch viel mehr sehen. Nachdem wir das grundsätzliche Verhalten dieser Annäherungen verstanden haben, werden wir sehen, dass diese Herangehensweise für jede irrationale Zahl *die bestmöglichen* rationalen Annäherungen liefert – in einem Sinne, was wir später präzise machen.

2 Grundlegende Eigenschaften der Kettenbrüche

Wir sollten den in der Einführung beschriebenen Algorithmus einmal genau aufschreiben.

Algorithmus 2.1 (Kettenbruchentwicklung)**.** Sei r eine reelle Zahl. Definiere $a_0 = \lfloor r \rfloor$ und $\theta_0 = r$. Dann kriegen wir rekursiv die nächsten, in dem wir immer

$$a_n = \lfloor \frac{1}{\theta_n} \rfloor$$
$$\theta_n = \frac{1}{\theta_{n-1} - a_{n-1}}$$

In der Praxis sieht das wie folgt aus:

$$r = \theta_0 = a_0 + \frac{1}{\theta_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\theta_2}} = \cdots$$

Falls das zu abstrakt ist, ist das OK. Wir werden diese Schreibweise kaum benutzen, und es reicht, intuitiv oben verstanden zu haben, wie der Algorithmus vorgeht. Bevor wir uns die Kettenbrüche genauer anschauen, definieren wir ein wenig hilfreiche Notation. Falls wir mit der in der Einführung beschriebenen Prozedur eine reelle Zahl r annähern, schreiben wir

$$r_n = [\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n \,] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Die a_n sind dann zwar positive ganze Zahlen, aber wir werden die Notation mit den eckigen Klammern großzügigerweise für alle reellwertigen Folgen a_n erlauben. Wenn a_n eine unendliche reellwertige Folge ist, und wir annehmen, dass $\lim_{n\to\infty} r_n$ existiert, ist dieser der unendliche Kettenbruch $[\, a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Definition 2.2. Wir nennen die r_n *Konvergenten* von r.

Wie der Name schon sagt und wie in der Einführung angedeutet, wollen wir zeigen, dass $r_n \to r$. Offensichtlich sind die r_n rationale Zahlen – wir können sie rekursiv aus den a_n finden.

Aufgabe

(i) Für welche r ist die Folge, die entsteht, nur endlich lang? Erinnert Dich in diesem Fall die Prozedur in der Einleitung an einen anderen Algorithmus, den Du vielleicht schon kennst?

(ii) Ist die Kettenbruchdarstellung im endlichen Fall eindeutig? Ist sie im unendlichen Fall eindeutig?

Definiere die Folgen

$$p_n = \begin{cases} a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ falls } x \geq 2 \\ a_0 a_1 + 1 \text{ falls } n = 1 \\ a_0 \text{ falls } n = 0 \end{cases}$$

$$q_n = \begin{cases} a_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ falls } x \geq 2 \\ a_1 \text{ falls } n = 1 \\ 1 \text{ falls } n = 0 \end{cases}$$

Lemma 2.3. Sei $\beta > 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt für $n \geq 2$

$$[\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \beta \,] = \frac{\beta p_{n-1} + p_{n-2}}{\beta q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Beweis. Das geht per Induktion ohne versteckte Tricks und wird der Einfachheit halber hier ausgelassen. □

Theorem 2.4. Es gilt $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ für alle $n \geq 0$.

Beweis. Wir überprüfen per Hand die Fälle $n = 0, 1$. $r_0 = a_0 = \frac{p_0}{q_0}$, und $r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$.
Der Induktionsschritt folgt direkt aus dem vorhergegangenen Lemma mit $\beta = a_n$. □

Bemerke, dass q_n positiv und monoton wachsend ist, und das ziemlich schnell! Im Folgenden nehmen wir an, dass die a_n eine unendliche Folge bilden. Spoiler für die Aufgabe oben – das geschieht genau dann, wenn r eine irrationale Zahl ist.

Theorem 2.5. Es gelten für alle $n \geq 0$ die Beziehungen

$$p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n \tag{2.1}$$
$$p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n = (-1)^n a_n \tag{2.2}$$

Beweis. Wir beweisen (2.1) mit einem schönen Determinantentrick – wer sich mit Linearer Algebra nicht auskennt, möge es direkt mit Induktion versuchen.
Es gilt zu zeigen, dass die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}$ gleich $(-1)^n$ ist. Der Fall $n = 0$ ist einfach geprüft. Die Rekursionsrelation aus 2.4 ist auch schreibbar als

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{pmatrix},$$

aber da Determinanten multiplikativ sind, wird die Determinante in jedem Schritt mit $\det \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ multipliziert! (2.2) geht exakt genauso. □

Diese letzten zwei Formeln sind etwas unscheinbar, und doch liefern sie uns den Schlüssel dazu, das Verhalten von r_n zu verstehen.

Aufgabe

Schaue Dir die Konvergenten von $\sqrt{2}$ an, die wir in der Einleitung erarbeitet hatten. Mache aus ihnen Dezimalzahlen und zeichne sie auf einem Zahlenstrahl nacheinander ein. Was fällt dir auf? Hast du eine Hypothese dafür, wie sich die Konvergenten der reellen Zahl annähern?

Lemma 2.6. Die geraden Konvergenten bilden eine monoton *steigende* Folge, und die ungeraden eine monoton *fallende*. Außerdem ist jede gerade Konvergente kleiner als jede ungerade.

Mit anderen Worten, die r_n pendeln auf den beiden Seiten von r hin und her. (Es ist nicht schwer, zu überprüfen, dass r größer als jede ungerade, und kleiner als jede gerade Konvergente ist.

Beweis.

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+2}}(p_{n+2}q_n - p_n q_{n+2}) = \frac{a_n(-1)^n}{q_n q_{n+2}}$$

ist positiv für gerade n und negativ für ungerade n.
Für den zweiten Teil, nehme an, dass $r_k \geq r_m$ für k gerade und m ungerade. wenn $k < m$, können wir k immer wieder um 2 vergrößern, bis wir $r_{m+1} > r_m$ erhalten. Das ist jedoch ein Widerspruch zu

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{1}{q_m q_{m+1}}(p_{m+1}q_n - p_m q_{m+1}) = \frac{(-1)^m}{q_m q_{m+1}} < 0,$$

da m ungerade ist. Der entgegengesetzte Fall $k > m$ geht analog. □

Aufgabe

Vielleicht hast Du ja gezweifelt, ob wir in der Darstellung $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ etwas kürzen müssen. Müssen wir das?

Theorem 2.7. Die Konvergenten r_n konvergieren gegen r.

Beweis. Wir haben schon im letzten Beweis gesehen, dass

$$|\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m}| \leq \frac{1}{q_m q_{m+1}}.$$

Da die q_m unbegrenzt groß werden, zeigt das, dass beide Teilfolgen der geraden und ungeraden Konvergenten monoton gegen die gleiche Zahl konvergieren. Da wir bereit notiert haben, dass r immer größer ist als die geraden Konvergenten und kleiner als die ungeraden, muss das genau diese Zahl sein. ☐

Umgekehrt könnte man sich ja fragen, wann eine beliebige Kettenbruchentwickung konvergiert. Die Antwort ist ohne Beweis wie folgt:

Theorem 2.8. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ konvergiert für $n \to \infty$ genau dann wenn $\sum a_n = \infty$. Insbesondere konvergiert es für jede Folge an positiven ganzen a_n.

3 Wie gut sind die Konvergenten?

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass der Abstand zweier aufeinanderfolgender Konvergenten sehr klein ist. Aber da die anzunähernde Zahl r zwischen den beiden steckt, ist ihr Abstand zu ihren Konvergenten mindestens genauso klein! Wir erhalten

$$|r - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Lemma 3.1. (AM-GM für zwei Variablen) Es gilt für positive x, y die Ungleichung

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Theorem 3.2. Eines von zwei aufeinanderfolgenden Konvergenten hat sogar höchstens den Abstand $\frac{1}{2q_n^2}$ von r.

Beweis. Angenommen, nicht. Dann gilt im Falle n gerade

$$\frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} < r - \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - r = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

ein direkter Widerspruch zur AM-GM Ungleichung. Der ungerade Fall ist analog. ☐

Theorem 3.3 (Dirichletscher Approximationssatz)**.** Für jede irrationale Zahl r gibt es unendlich viele $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^+$ mit

$$|\frac{p}{q} - r| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Beweis. Der klassische Beweis hierfür geht mit dem Schubfachprinzip. Probier es doch aus! ☐

Aber tatsächlich haben wir schon eine stärkere Variante bewiesen, nämlich dass wir unendlich viele rationale Näherungen finden, die

$$|\frac{p}{q} - r| \leq \frac{1}{2q^2}$$

erfüllen! Tatsächlich kann man das auf die Spitze treiben, und die bestmögliche Version des Satzes ist

Theorem 3.4 (Satz von Hurwitz)**.** Für jede irrationale Zahl r gibt es unendlich viele $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^+$ mit

$$|\frac{p}{q} - r| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Aufgabe

[**Sehr schwer**] Beweise den Satz von Hurwitz! Tipp: Erweitere Theorem 3.2 auf drei aufeinanderfolgende Konvergenten.

Wir hatten ja versprochen, dass wir uns sinnvoll überlegen, was es heißt, eine *beste* rationale Annäherung zu sein.

Definition 3.5. $\frac{p}{q}$ ist ein *bester* rationaler Approximant für ein irrationales r, wenn für alle $p' \in \mathbb{Z}, 0 < q' < q$ gilt, dass $|\frac{p}{q} - r| \leq |\frac{p'}{q'} - r|$.

Offensichtlich können wir jede irrationale Zahl sowieso beliebig gut mit rationalen Zahlen approximieren. Wir verlangen also hier, dass wir es gut mit rationalen Zahlen *mit kleinem Nenner* approximieren können.

Theorem 3.6. Die Konvergenten r_n sind beste rationale Approximanten für r. Es gilt sogar stärker, dass für $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $0 < q < q_{n+1}$ die Ungleichung

$$|qr - p| \geq |q_n r - p|$$

gilt.

Aufgabe

Überzeuge Dich, dass die obere Aussage implizert, dass $\frac{p_n}{q_n}$ eine beste rationale Annäherung für r ist.

.

Beweis. Schreibe p und q in der folgenden Form:

$$p = up_{n+1} + vp_n$$
$$q = uq_{n+1} + vq_n$$

(wer ein wenig Lineare Algebra kennt, weiß wieso das immer geht!) Nun ist es nicht schwer, ein paar Fälle zu checken und zu sehen, dass u und v nicht 0 sind, und unterschiedliche Vorzeichen haben. Daraus folgt dann sofort

$$|qr - p| = |u(rq_{n+1} - p_{n+1}) + v(rq_n - p_n)| \geq |u||rq_{n+1} - p_n| + |v||rq_n - p_n| \geq |rq_n - p_n|.$$

$\square$

Periodizität von Kettenbrüchen

Jetzt haben wir so lange über Kettenbrüche philosophiert, und außer $\sqrt{2}$ keinen einzigen berechnet!

Aufgabe

Berechne die Kettenbruchentwicklungen der folgenden reellen Zahlen:

(i) $\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{7}$

(iii) $\sqrt{19}$

Dir fällt bestimmt auf, dass alle anfangen, sich irgendwann zu wiederholen. Aber es gibt ja auch unendlich viele Kettenbruchentwicklungen, die sich nicht wiederholen, aber trotzdem gegen reelle Zahlen konvergieren.

Definition 3.7. (i) Eine irrationale Zahl r hat eine *periodische Kettenbruchentwicklung,* wenn

$$\begin{aligned} r &= [\,a_0; a_1, a_2, \ldots, a_m, \overline{a_{m+1}, \ldots, a_n}\,] = \\ &= [\,a_0; a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, \ldots] \end{aligned}$$

(ii) Eine irrationale Zahl r hat eine *rein periodische Kettenbruchentwicklung,* wenn

$$r = [\overline{a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n}]$$

Theorem 3.8. Eine irrationale Zahl r hat genau dann eine periodische Kettenbruchentwicklung, wenn sie Nullstelle eines ganzzahligen Polynoms zweiten Grades ist.

Beweis. Wir beweisen die erste Richtung. Angenommen, r hat eine *rein* periodische Kettenbruchentwicklung. Dann gilt nach Lemma 2.3

$$r = [\overline{a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n}] = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n, r] = \frac{p_n r + p_{n-1}}{q_n r + q_{n-1}},$$

was nach dem Umstellen eine quadratische Gleichung in r erzeugt.

Aufgabe

Erweitere das obige Argument auf alle periodischen Kettenbruchentwicklungen. Tipp: Recherchiere, was eine quadratische irrationale Zahl ist!

Die Rückrichtung ist etwas schwieriger. Wir nehmen an, r erfüllt $ar^2 + br + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$.
Wir schauen uns die genaue Definition des Algorithmus 2.1 an. Es ist klar, dass sobald die Zahl θ_n sich wiederholt, sich der Kettenbruch anfängt zu wiederholen, da alle a_n mit $n > k$ allein aus θ_k berechnet werden können. Es gilt also zu zeigen, dass es nur endlich viele Möglichkeiten für die θ_n gibt. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Nach Voraussetzung und nach Lemma 2.3 gilt

$$0 = f(r, 1) = f(\frac{p_{n-1}\theta_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\theta_n + q_{n-2}}, 1)$$
$$\Rightarrow 0 = f(p_{n-1}\theta_n + p_{n-2}, q_{n-1}\theta_n + q_{n-2})$$

Nach Ausmultiplizieren sehen wir, dass θ_n eine Nullstelle von

$$A_n x^2 + B_n x + C_n$$

ist.

Aufgabe

Rechne nach, dass

(i) $A_n = f(p_{n-1}, q_{n-1})$

(ii) $C_n = f(p_{n-2}, q_{n-2})$

(iii) $B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac$

Aus diesen Formeln folgt, dass die θ_n nur Nullstellen dieser quadratischen Polynome sein können. Es würde also ausreichen zu zeigen, dass es nur endliche viele solche Polynome gibt. Und das stimmt, denn –
Behauptung: $f(p_n, q_n)$ ist durch Konstanten unabhängig von n beschränkt.
Das folgt recht zügig aus

$$\begin{aligned} f(p_n, q_n) &= q_n^2 f(\frac{p_n}{q_n}, 1) = q_n^2(f(\frac{p_n}{q_n}, 1) - f(r, 1)) = \\ &= q_n^2(a(\frac{p_n^2}{q_n^2} - r^2) + b(\frac{p_n}{q_n} - r)) = q_n^2(a(\frac{p_n}{q_n} + r) + b)(\frac{p_n}{q_n} - r) \\ &< q_n^2(a(\frac{p_n}{q_n} + r) + b)(\frac{1}{q_n^2}) = a(\frac{p_n}{q_n} + r) + b \to 2ar + b, \end{aligned}$$

denn was konvergiert, ist beschränkt. □

Aufgabe

Zeige, dass die Kettenbruchentwickung eines $r \in \mathbb{R}$ genau dann *rein* periodisch ist, wenn

(i) $r > 1$.

(ii) r ist Nullstelle eines quadratischen ganzzahligen Polynoms $p(x)$.

(iii) Die *andere* Nullstelle von $p(x)$, genannt r', erfüllt $-1 < r' < 0$.