Satz. *Sei Δ ein n-dimensionales Simplex mit den Ecken $v_0, \ldots, v_n$. Sei Δ' die konvexe Hülle der Spiegelungen von v_j an v_i für $0 \leq i, j \leq n$. Dann gilt*

$$\operatorname{Vol}(\Delta') = D_n \cdot \operatorname{Vol}(\Delta) \ ,$$

wobei

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 2^k$$

die n-te zentrale Delannoy-Zahl ist.

Beweis. Da die Operation $\Delta \mapsto \Delta'$ mit linearen Abbildungen kommutiert, können wir ohne Einschränkung $\Delta = \Delta_n$ annehmen, wobei

$$\Delta_n := \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_i \geq 0, \sum a_i \leq 1\right\} = \operatorname{conv}\{0, e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Bekanntlich ist $\operatorname{Vol}(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$ (das lässt sich zum Beispiel durch Zerlegung von $[0,1]^n$ in $n!$ Kopien von Δ_n zeigen). Nach Definition ist $\Delta' = \operatorname{conv}\{2v_i - v_j \mid 0 \leq i, j \leq n\}$. Wegen $\Delta = \operatorname{conv}\{v_0, \ldots, v_n\}$ gilt somit $\Delta' = \{2v - w \mid v, w \in \Delta\}$. Hieraus sieht man leicht, dass

$$\Delta'_n = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{a_i > 0} a_i \leq 2, \sum_{a_i < 0} a_i \geq -1\right\}$$

gilt. Bis auf die Nullmenge $N = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i = 0 \text{ für ein } i\}$ können wir Δ'_n also disjunkt zerlegen in Mengen P_I für $I \subset \{1, \ldots, n\}$, wobei

$$P_I := \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_i \geq 0 \text{ für } i \in I,\ \sum_{i \in I} a_i \leq 2,\ a_i \leq 0 \text{ für } i \notin I,\ \sum_{i \notin I} a_i \geq -1\right\} \ .$$

Bis auf Vertauschung der Koordinaten gilt aber $P_I = 2\Delta_k \times -\Delta_{n-k}$ für $|I| = k$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(\Delta'_n) &= \sum_{I \subset \{1, \ldots, n\}} \operatorname{Vol}(P_I) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Vol}(2\Delta_k) \operatorname{Vol}(-\Delta_{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \operatorname{Vol}(\Delta_k) \operatorname{Vol}(\Delta_{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \frac{1}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 2^k \\
&= \operatorname{Vol}(\Delta_n) \cdot D_n \ .
\end{aligned}$$

□