Das Banach-Tarski-Theorem

Maximilian Keßler, Georgi Kocharyan

1. Mai 2019

Zusammenfassung

Dieses Skript entstand im Rahmen des Mathecamps der Uni Augsburg 2018 in Violau. Es soll die in einer Vortragsreihe erarbeiteten Erkenntnise über das *Banach-Tarski Theorem* festhalten, formalisieren und vertiefen.

Es sollen zunächst die Aussage des Theorems und seine Konsequenzen vorgestellt werden, bevor wir uns nach der Einführung einiger essentiellen Grundlagen dem Beweis des Theorems widmen.

1 Einführung

Im Jahr 1924 haben die beiden Mathematiker Stefan Banach und Alfred Tarski das folgende bemerkenswerte Theorem bewiesen:

Satz 1.1. Eine Kugel vom Radius $r = 1$ im Raum $\mathbb{R}^3$ kann so in 5 Teilen zerlegt werden, sodass es Rotationen $r_1, r_2, \ldots, r_5$ so gibt, dass ... zwei Kugeln entstehen. Mind = blown.

Auch wenn es sich hierbei um einen Satz handelt, nennt man die Aussage auch häufig das *Banach-Tarski-Paradoxon*. Dies liegt daran, dass die Konsequenzen für uns unintuitiv und nicht denkbar wirken. Vor Allem die Vorstellung von Volumen wird hier scheinbar „verletzt“: Drehungen und Verschiebungen erhalten das Volumen von Körpern, dieses hat sich am Ende jedoch scheinbar verdoppelt, was keinen Sinn macht.

Physikalisch ist dies nicht möglich (auch, wenn manch einer schon seine Goldkugeln duplizieren wollen würde), die mathematische Welt ist hier durch ihre unendliche Exaktheit des Ortes abstrakter als die reale Welt. Damit ist gemeint, dass man den Raum in unendlich diffuse und feine Teilmengen zerteilen kann (was im Beweis auch geschehen wird), dass ihnen kein sinnvoller Volumenbegriff mehr zugeordnet werden kann, der sich unter Drehungen und Schiebungen nicht verändert.

Genau dies ist auch die Konsequenz aus dem Satz von Banach-Tarski.

2 Grundlagen

Es werden nun grundlegende Definitionen und Sätze verfasst, die für das Verständnis des Beweises unumgänglich sind.

2.1 Gruppen

Essentiell für den Beweis des *Banach-Tarski-Theorems* ist die Gruppentheorie, ein sehr wichtiger Teilbereich der Mathematik.

Eine Gruppe ist grob gesagt eine Menge mit einer Verknüpfung, die 2 Elementen aus der Menge wieder ein Element dieser Menge zuordnet. Damit lassen sich Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten festhalten. Formal halten wir dies so fest:

Definition 2.1. Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Abgeschlossenheit Die Gruppe ist bezüglich ihrer Verknüpfung abgeschlossen, d.h. $a \circ b \in G \quad \forall a, b \in G$, bzw. $\circ$ ist eine Abbildung $G \times G \mapsto G$

Assoziativität Für alle $a, b, c \in G$ ist $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

Neutrales Element Es gibt ein neutrales Element e, sodass für alle $a \in G$ auch $a \circ e = e \circ a = a$ gilt.

Inversenbildung Zu jedem Element $a \in G$ gibt es ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Daraus folgen direkt ein paar interessante und nützliche Eigenschaften von Gruppen:

Lemma 2.2 (Eigenschaften von Gruppen)**. (1)** Das neutrale Element einer Gruppe ist eindeutig.

(2) Das Inverse Element ist stets eindeutig bestimmt, d.h. es gibt je Paare von zueinander inversen Elementen.

Proof. **(1)** Angenommen, e und e' sind neutrale Elemente, dann ist

$$e = e \circ e' = e'$$

, die beiden neutralen Elemente sind also gleich.

(2) Angenommen, $a^{-1}, a^{-1'}$ sind beides Inverse von a, dann ist

$$a^{-1} = a^{-1} \circ e = a^{-1} \circ (a \circ a^{-1'}) = (a^{-1} \circ a) \circ a^{-1'} = e \circ a^{-1'} = a^{-1'}$$

, es handelt sich also um die gleichen Elemente.

$\square$

Das Ganze mag jetzt ein wenig abstrakt wirken, allerdings sind die meisten Mengen, mit denen wir zu tun haben (und insbesondere Rechnen), Gruppen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wobei manche sogar noch mehr Strukturen aufweisen, als wir hier behandeln können.

Es sind aber auch Gruppen möglich, die nichts mit Rechenoperationen zu tun haben, wir können zum Beispiel die Gruppe D der Drehungen gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ nehmen, wobei wir nur um Vielfache von $90°$ drehen. Diese hat dann die Elemente $\{0°, 90°, 190°, 270°\}$. Als Verknüpfung nehmen wir einfach die Hintereinanderausführung der 2 Drehungen, also in z.B. $90° \circ 180° = 270°$. Das neutrale Element der Gruppe ist hier die Drehung um $0°$, also die Identität, und die inversen Paare von Elementen sind $\{90°, 270°\}$ und $\{180°, 180°\}$, das neutrale Element ist wie immer zu sich selbst invers. Auch die Assoziativität ist gegeben, da Hintereinanderausführen von Drehungen nichts anderes ist, als ihre Drehwinkel zu addieren, und Addition bekanntermaßen assoziativ ist.

2.2 Isomorphismen

Es stellt sich die natürliche Frage, wann 2 Gruppen gleich sind, auch wenn sie an sich nichts miteinander zu tun haben.

Betrachten wir zum Beispiel die Gruppen $\mathbb{Z}_4 = (\{0, 1, 2, 3\}, +)$, wobei die Verknüpfung die Addition zweier Zahlen $\mod 4$ ist, und die Gruppe D der Drehungen um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ aus dem vorherigen Abschnitt.

Beide Gruppen bestehen nun aus 4 Elementen, die sich in gewisser Weise gleich verhalten, wenn man sie verknüpft, da Hintereinanderausführen von Drehungen um denselben Punkt der Addition der Drehwinkel entspricht, und eine Drehung um $360°$ wieder der Identität entspricht. Wir müssen also 4 mal um $90°$ drehen, um wieder zum neutralen Element zu gelangen, analog aber auch 4 mal die 1 addieren, um wieder die 0 zu erhalten. Ähnliches gilt für die anderen Elemente auch.

Wir stellen nun die Begriffe des *Homomorphismus* und des *Isomorphismus* vor:

Definition 2.3 (Homomorphismus)**.** Betrachte zwei Gruppen $(G, \circ_g)$ und $(H, \circ_h)$. Eine Abbildung $f : G \mapsto H$ wird Homomorphismus genannt, wenn dann für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$f(g_1 \circ_g g_2) = f(g_1) \circ_h f(g_2)$$

Hieraus folgen direkt ein paar interessante Eigenschaften:

Lemma 2.4. Gegeben sei ein Homomorphismus $f : G \mapsto H$, dann gilt:

(1) $f(e_G) = e_H$, wenn wir die neutralen Elemente aus G, H respektive mit e_G, e_H bezeichnen.

(2) $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

Proof. **(1)** Es ist $f(g) = f(g \circ_g e_G) = f(g) \circ_h f(e_G)$, die Behauptung folgt also daraus, dass wir bereits wissen, dass das neutrale Element einer Gruppe eindeutig ist.

(2) Es ist $e_H = f(e_G) = f(g \circ_g g^{-1}) = f(g) \circ_h f(g^{-1})$, die Behauptung folgt also aus der bereits gezeigten eindeutigen Inversenbildung.

□

Allerdings ist das Bild von G nicht immer sehr interessant, denn zum Beispiel ist jede Funktion $f : G \mapsto H$ mit $f(g) = e_H$ ein Homomorphismus ist, wir bilden einfach alles auf das neutrale Element ab, das ja invers zu sich selbst ist.

Deswegen gibt es den weitaus stärkeren Begriff des Isomorphismus:

Definition 2.5 (Isomorphismus)**.** Betrachte zwei Gruppen $(G, \circ_g)$ und $(H, \circ_h)$. Eine Funktion $f : G \mapsto H$ heiße *Isomorphismus*, wenn f ein Homomorphismus ist, und f bijektiv ist, d.h. wenn es eine Funktion $g : H \mapsto G$ mit $f \circ g = id_H$ und $g \circ f = id_G$ gibt.

Es folgt leicht, dass dann auch $g : H \mapsto G$ ein Homomorphismus ist, da sich wegen der Bijektivität von f jedes Element in H eindeutig als $f(g)$ mit $g \in G$ schreiben lässt, es genügt also zu zeigen:

$$g(f(a \circ_g b)) = a \circ_g b = g(f(a)) \circ_g g(f(b))$$

Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass $f : G \mapsto H$ Homomorphismus ist.

Durch die Definition des Isomorphismus übertragen sich alle Eigenschaften von G nach H und umgekehrt, man sagt dann, die zwei Gruppen sind *isomorph* zueinander.

Mit den Definitionen sieht man nun auch, dass die 2 Gruppen aus dem Beispiel isomorph sind, wenn man $f : \mathbb{Z}_4 \mapsto D, f(g) = g \cdot 90°$ setzt.

Ein weiteres interessanteres Beispiel sei hier gegeben:

Beispiel 2.6. Betrachte die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Dann bildet die Funktion $f : x \mapsto e^x$ einen Gruppenisomorphismus. Die Umkehrfunktion ist dabei $g : x \mapsto \ln(x)$ Das sieht man leicht daran, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(a + b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b)$$

gilt, und mit g eine Umkehrfunktion gegeben ist.

2.3 Gruppenwirkungen

Definition 2.7. Eine Gruppenwirkung besteht aus einer Gruppe G, dessen Elemente auf die Elemente einer Menge X „wirken “. Das bedeutet, der Ausdruck $g.x$ mit $g \in G, x \in X$ ist eindeutig definiert. Außerdem muss folgendes gelten:

$$(g_1 \circ g_2).x = g_1.(g_2.x) \tag{1}$$

$$e.x = x \tag{2}$$

Beispiel 2.8. Man betrachte die Gruppe D aus 2.1, die Drehungen um eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$ bezeichnete. Diese Drehungen können als Wirkungen auf Punkte im $\mathbb{R}_3$ dargestellt werden, denn: Die Verknüpfungen zweier Drehungen ist die Hintereinanderausführung. Da sie assoziativ ist, folgt (1) sofort. Das Nullelement der Gruppe, nämlich die Drehung um 0 Grad, verändert x nicht und zeigt somit, dass (2) erfüllt ist.

2.3.1 Stabilisatoren

Definition 2.9. Die Menge S_x aller Stabilisatoren eines Mengenelements $x \in X$ ist folgend definiert:

$$S_x = \{g \in G \quad | \quad g.x = x\}$$

Wie der Name bereits vermuten lässt, sind dies die Elemente der Gruppe, die auf ein Mengenelement wirken und es unverändert lassen.

2.3.2 Orbite

Definition 2.10. Der Orbit O_x eines Mengenelements $x \in X$ ist wie folgt definiert:

$$O_x = \{x' \in X \quad | \quad \exists g \in G : g.x' = x\}$$

Ebenfalls in Worten beschreibt das die Menge der Mengenelemente in X, auf das x durch Gruppenwirkungen aus G abgebildet werden kann.

Wir führen nun noch den Begriff der Äquivalenzklasse ein:

Definition 2.11 (Äquivalenzklassen)**.** Äquivalenzklassen sind Teilmengen einer Menge, dessen Mitglieder untereinander durch eine *Äquivalenzrelation* verwandt sind. Eine Relation $\sim$ heißt Äquivalenzrelation, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$x \sim x \tag{1}$$
$$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x \tag{2}$$
$$x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow x \sim z \tag{3}$$

Beispiel 2.12. (1) Das prominenteste Beispiel ist wohl das „="der reellen Zahlen.

(2) Die Kongruenz bezüglich modulo-Restklassen stellt ebenfalls eine Äquivalenzrelation dar. Die entsprechende Äquivalenzklasse wäre die Menge aller natürlichen Zahlen, die denselben Rest bei der Teilung durch das Modul hinterlassen.

Lemma 2.13. Äquivalenzklassen einer Menge M sind disjunkt.

Proof. Seien A_1, A_2 unterschiedliche Äquivalenzklassen aus einer Menge A.

$$\forall a_1 \in A_1 \wedge \forall a_2 \in A_2 : a_1 \nsim a_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2$$

□

Lemma 2.14. Der Orbit ist eine Äquivalenzrelation.

Proof. $\sim$ sei hierbei „liegt im Orbit von". Offensichtlich liegt x in seinem eigenen Orbit, da e.x = x. Daraus folgt (1). Aus den Definitionen des Orbits und der Gruppenwirkung folgt (2):

$$x \in O_y \Leftrightarrow \exists g \in G : g.y = x \Leftrightarrow y = g^{-1}.x \Leftrightarrow y \in O_x$$

(3) folgt ähnlich:

$$x \in O_y \wedge y \in O_z \Leftrightarrow \exists g_1 \in G : g_1.y = x \Leftrightarrow \exists g_2 : x = g_1.(g_2.z) \Leftrightarrow x = (g_1^{\circ} g_2).z \Leftrightarrow x \in O_z$$

□

Das bedeutet nun, dass die Orbite in jeder Menge als eigene, abgetrennte Bereiche betrachtet werden können, dessen Elemente durch die Gruppenwirkung nicht in andere Bereiche abgebildet werden.

Abschließend führen wir den Begriff der Partitionierung ein:

Definition 2.15. Eine Partitionierung einer Menge M ist eine Menge P, deren Elemente nichtleere Teilmengen von M sind, sodass jedes Element aus M in genau einer dieser Teilmengen.

Anders gesagt ist eine Partitionierung eine Zerlegung der Menge M in disjunkte Teilmengen. Es gilt nun folgender Zusammenhang:

Lemma 2.16. Gegeben sei eine Menge M und eine Äquivalenzrelation auf ihr. Dann bildet die Menge aller Äquivalenzklassen eine Partitionierung von M.

Proof. Betrachten wir die Menge A aller Äquivalenzklassen. Da stets $x \sim x$ gilt, liegt jedes x in einer Äquivalenzklasse, und somit in einer der Teilmengen von A. Umgekehrt kann aber kein Element in 2 solchen Teilmengen liegen, denn wie wir bereits wissen, sind Äauivalenzklassen disjunkt. □

Korollar 2.17. Die Menge aller Orbite einer Gruppenwirkung $G \mapsto X$ ist eine Partitionierung von X.

2.3.3 Fixe Untermengen

Definition 2.18 (Fixe Untermenge)**.** Eine fixe Untermenge bezüglich einer Gruppenwirkung $G \mapsto X$ ist eine Teilmenge $U \subset X$, sodass für alle $g \in G, u \in U$ auch $g.u \in U$.

Man kann also auch die Gruppenwirkung $G \mapsto U$ betrachten, da die Gruppenwirkung auch eine Abbildung $G \times U \mapsto U$ darstellt.

Zudem gilt:

Lemma 2.19. Ist U eine fixe Untermenge bezüglich der Gruppenwirkung $G \mapsto X$, so ist auch $X \setminus U$ eine fixe Untermenge.

Proof. Nehmen wir gegenteilig an, es gäbe $x \in X \setminus U$ und ein $g \in G$ mit $g.x \notin X \setminus U$. Dann ist $g.x \in U$. Bezeichnen wir wie üblich mit g^{-1} das inverse Element von g, so ist $g^{-1}.(g.x) = (g \circ g^{-1}).x = x \notin U$, was einen Widerspruch zur Definition der fixen Untermenge U darstellt. □

2.4 Repräsentantensysteme

Betrachten wir eine Gruppenwirkung $G \mapsto X$. Ein Repräsentantensystem ist eine Teilmenge $M \subseteq X$ mit folgenden Eigenschaften:

Definition 2.20 (Repräsentantensystem)**.** Sei $G \mapsto X$ eine Gruppenwirkung. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heiße *Repräsentantensystem*, wenn folgende Bedingungen zutreffen:

(1) $\forall m, m' \in M m \neq m' \Leftarrow \nexists g \in G$ mit $g.m = m'$

(2) Für $x \in X$ gibt es **genau** ein $m \in M$ und mindestens ein $g \in G$ mit $g.m = x$

In Worten heißt das: Wir können bestimmte Elemente m aus X wählen, sodass durch die Gruppenwirkung kein m auf ein anderes abgebildet wird. Außerdem kann jedem x ein „Repräsentant“zugeordnet werden, sodass dieser für geeignetes $g \in G$ auf x abgebildet wird.

Wir wollen nun zeigen, dass es zu jeder Gruppenwirkung stets ein solches Repräsentantensystem gibt:

Lemma 2.21. Jede Gruppenwirkung $G \mapsto X$ besitzt ein Repräsentantensystem.

Proof. Wir betrachten die Menge O aller Orbite der Gruppenwirkung. Nun wählen wir aus jedem Orbit genau ein Element m für das Repräsentantensystem.

Es folgt nun Punkt (1), da keine 2 gewählten Punkte im selben Orbit liegen, und es somit kein Gruppenelement g gibt mit $g.m = m'$ (dies ist genau die Definition eines Orbits).

Punkt (2) folgt daraus, dass es für jedes $x \in X$ genau ein $m \in X$ gibt, das in seinem Orbit liegt. Daraus folgt per Definition des Orbits, dass es mindestens ein $g \in G$ gibt mit $g.m = x$ □

Kommentar. Der soeben erbrachte Beweis beruht entscheidenderweise auf dem sogenannten *Auswahlaxiom*, das es uns ermöglicht, aus jedem Orbit genau ein Element m zu wählen. Ohne das Auswahlaxiom folgt auch nicht, dass jede Gruppenwirkung ein Repräsentantensystem hat.

3 Die besonderen Gruppen $SO(3)$ und $\mathbb{F}_2$

In diesem Abschnitt werden die beiden für den Beweis essentiellen Gruppen $SO(3)$ sowie $\mathbb{F}_2$ vorgestellt.

3.1 Die Symmetriegruppe $SO(3)$

Unter der Gruppe $SO(3)$ versteht man die Symmetriegruppe der Drehungen im dreidimensionalen Raum.

Lemma 3.1. Betrachte die Menge M jeglicher Drehungen um jede mögliche Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$. Diese bildet mit der Hintereinanderausführung zweier Drehungen eine Gruppe, die wir als SO(3) bezeichnen.

Proof. Wir bezeichnen eine Drehung um eine Gerade g um den Winkel α mit r_g^α. Jede Drehung im Dreidimensionalen kann als 3×3-Matrix dargestellt werden, und die Hintereinanderausführung zweier Drehungen als Multiplikation dieser zwei linearen Transformationen. Es ist allgemein bekannt, dass diese assoziativ ist, also ist dies auch unsere Gruppe. Das neutrale Element bildet jede Drehung mit $\alpha = 0$, die wir also alle als identisch ansehen. Das inverse Element eines Elements r_g^α ist $r_g^{-\alpha}$. Da die Hintereinanderausführung zweier Drehungen stets wieder eine Drehung ist, ist die Gruppe abgeschlossen - formeller gesagt ist die Determinante einer Matrix multiplikativ und ist somit für das Produkt erneut 1 (da det(A) für Drehmatrizen stets 1 ergibt). Damit sind alle Gruppenaxiome erfüllt. □

3.2 Die freie Gruppe $\mathbb{F}_2$

Diese Gruppe mag vielleicht auf dem ersten Blick nichts mit Drehungen zu tun haben, jedoch werden wir bald interessante Parallelen ziehen können.

Unter der *freien Gruppe der Ordnung 2* versteht man die Menge aller Wörter, die nur aus 2 Buchstaben bestehen, wobei es zu beiden Buchstaben jeweils einen „negativen"gibt, d.h. wenn die beiden nebeneinander stehen, heben sie sich gegenseitig auf. Also ungefähr so wie Materie und Antimaterie. Formal halten wir dies in folgendem Lemma fest:

Lemma 3.2. Betrachte die Menge M aller endlichen (unter Umständen leeren) Folgen aus den Buchstaben a, b und ihren respektiven inversen a^{-1}, b^{-1}, wobei wir die leere Folge mit „$-$" bezeichnen. Ein Wort, bei dem ein Buchstabe neben seinem Inversen steht, lässt sich reduzieren, indem man diese beiden Buchstaben aus dem Wort entfernt. Analog heiße ein Wort *reduziert*, wenn es sich nicht weiter reduzieren lässt. Die Verknüpfung zweier Worte $w_1 = x_1x_2x_3 \cdots x_n$ und $w_2 = y_1y_2 \cdots y_n$ ist nun die reduzierte Form von $w_1 \circ w_2 = x_1x_2 \cdots x_ny_1y_2 \cdots y_n$, wobei $x_i, y_i \in \left\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\right\}$. Alle reduzierten Elemente aus M bilden nun mit dieser Verknüpfung eine Gruppe $\mathbb{F}_2$.

Proof. Zunächst müssen wir zeigen, dass die reduzierte Form eines Wortes wohldefiniert, also eindeutig ist. Indem wir zwei nebeneinander stehende Buchstaben stets streichen, erhalten wir nach endlich vielen Schritten sicherlich ein reduziertes Wort, da sich in jedem Schritt die Anzahl der Buchstaben um 2 verringert. Zudem ist es irrelevant, welches Paar von Inversen Buchstaben man streicht, da man damit die Streichung aller anderen Paare nicht beeinflusst. Überschneiden sich nämlich 2 oder mehr Paare, so bilden diese (wegen der Eindeutigkeit des Inversen Buchstabens) eine alternierende Buchstabenfolge (zwischen dem Buchstaben und seinem Inversen), und es ist irrelevant, welches der Paare man streicht, da alle zum gleichen Ergebnis führen. Zwar kann so in einem Schritt auch wieder ein neues streichbares Paar entstehen (etwa bei $aabb^{-1}a^{-1}a^{-1}a$, wenn man das b, b^{-1}-Paar streicht, allerdings wäre dies irgendwann während des Streichprozesses sowieso passiert

Die Abgeschlossenheit der Gruppe folgt daraus, dass die Aneinanderreihung zweier Folgen wieder eine Folge ist, das neutrale Element der Gruppe ist klarerweise das „leere"Wort. Assoziativität lässt sich mit $w_i = x_{i,1}x_{i,2} \cdots x_{i,n_i}$ leicht nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
w_1 \circ (w_2 \circ w_3) &= (x_{1,1} \cdots x_{1,n_1}) \circ ((x_{2,1} \cdots x_{2,n_2}) \circ (x_{3,1} \cdots x_{3,n_3})) \\
&= (x_{1,1} \cdots x_{1,n_1}) \circ ((x_{2,1} \cdots x_{2,n_2} x_{3,1} \cdots x_{3,n_3})) \\
&= x_{1,1} \cdots x_{1,n_1} x_{2,1} \cdots x_{2,n_2} x_{3,1} \cdots x_{3,n_3} \\
&= (x_{1,1} \cdots x_{1,n_1} x_{2,1} \cdots x_{2,n_2}) \circ (x_{3,1} \cdots x_{3,n_3}) \\
&= ((x_{1,1} \cdots x_{1,n_1}) \circ (x_{2,1} \cdots x_{2,n_2})) \circ (x_{3,1} \cdots x_{3,n_3}) \\
&= (w_1 \circ w_2) \circ w_3
\end{aligned}
$$

Inversenbildung beweisen wir induktiv:

Klarerweise sind die Wörter a, b die respektiven Inversen zu a^{-1}, b^{-1}, und das neutrale Wort ist invers zu sich selbst. Da sich jedes Wort als Verknüpfung endlich vieler Wörter a, b, a^{-1}, b^{-1} darstellen lässt (Assoziativität ist bereits gezeigt), und wir zudem allgemein wissen, dass $(w_1 \circ w_2)^{-1} = w_2^{-1} \circ w_1^{-1}$, folgt, dass alle Elemente ein Inverses besitzen.

$\square$

3.2.1 Die paradoxe Zerlegung

Die *paradoxe Zerlegung* von $\mathbb{F}_2$ ist die Kernidee des *Banach-Tarski-Paradoxons*. Sie beruht darauf, dass wir $\mathbb{F}_2$ scheinbar verdoppeln können. Hierzu definieren wir zunächst die folgenden Teilmengen von $\mathbb{F}_2$:

Definition 3.3. Die Menge aller Wörter in $\mathbb{F}_2$, die mit dem Buchstaben x beginnen, sei mit $S(x)$ bezeichnet. Es ist also:

$$S(x) = \{w = x_1 x_2 \cdots x_n \quad | \quad x_1 = x\}$$

Zudem sei für ein Wort w und eine Menge $M \subset \mathbb{F}_2$ der Ausdruck

$$w \circ M = \{w \circ m \quad | \quad m \in M\}$$

Zusätzlich notieren wir noch $A_1 = S(a), A_2 = S(a^{-1}), A_3 = S(b), A_4 = S(b^{-1}), A_5 = \{-\}$. Dann ist schnell ersichtlich, dass $\mathbb{F}_2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, da jedes Wort in $\mathbb{F}_2$ mit einem der 4 möglichen Buchstaben beginnt, oder das leere Wort ist.

Diese Zerlegung ist nun paradox, wenn man folgendes feststellt:

Lemma 3.4. Mit obiger Notation ist:

$$
\begin{aligned}
a \circ A_2 &= A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \\
b \circ A_4 &= A_4 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_5
\end{aligned}
$$

Proof. Das Wort a wird mit jedem möglichen Wort w verknüpft, das mit a^{-1} anfängt. Dies hat immer genau eine Reduktion zur Folge, die das a zusammen mit dem anfänglichen a^{-1} von w verschwinden lässt. Das lässt alle Wörter übrig, dessen erster Buchstabe mögliche zweite Buchstaben von Elementen der Menge A_1 sind. Dies sind aber alle Buchstaben außer a, da sonst in $w \in A_1$ bereits a neben a^{-1} gestanden, und das Wort somit nicht reduziert gewesen wäre. In Verbindung mit allen Wörtern, die mit a anfangen, ergibt dies unsere Gruppe. Analog geschieht dies für b. $\square$

Beachte, dass das leere Wort mit genau dem Element aus $S(a)$ bzw. $S(b)$, das allein aus a bzw. b besteht, hier selbstverständlich auch erreicht wird.

Wir können Lemma 3.4 sogar noch verbessern, und die Mengen A_1 und A_5 zu A_1' vereinigen, sodass dann die analogen Gleichungen ohne A_5 gelten sollen.

Hierbei enthält dann allerdings aA_2 zunächst das leere Wort, $A_2 + A_3 + A_4$ jedoch nicht, weswegen wir das Wort a^{-1} aus der Menge A_2 entfernen müssen. Per Induktion müssen wir dann aber alle Wörter $a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1}$ aus A_2 entfernen, dass die erste Gleichung erfüllt ist. Wie man feststellt, ist sogar gleichzeitig die 2. Gleichung erfüllt, wenn man die aus A_2 entfernten Wörter wieder zu A_1 hinzufügt.

Formal gesprochen erreichen wir damit folgendes Lemma:

Lemma 3.5. Sei $B = \{a^{-1}, a^{-1}a^{-1}, a^{-1}a^{-1}a^{-1}, \cdots\}$ die Menge der Wörter in $\mathbb{F}_2$, die nur aus dem Buchstaben a^{-1} besteht, und die nicht das leere Wort enthält. Dann gilt mit

$$A_1' = A_1 \cup A_5 \cup B, A_2' = A_2 \setminus B$$

auch wieder:

$$\begin{aligned} a \circ A_2' &= A_2' \cup A_3 \cup A_4 \\ b \circ A_4 &= A_4 \cup A_1' \cup A_2' \end{aligned}$$

Und die Mengen A_1', A_2', A_3, A_4 bilden eine Partitionierung von $\mathbb{F}_2$

Proof. Wegen $B \subset A_2$ und $A_1' \cap A_2' = \emptyset$ folgt:

$$A_1' \cup A_2' = (A_1 \cup B \cup A_5) \cup (A_2 \setminus B) = A_1 \cup A_2 \cup A_5$$

Damit ist die 2. Behauptung bereits erfüllt, wenn wir Lemma 3.4 benutzen. Zudem ist

$$a \circ A_2' = a(A_2 \setminus B) = aA_2 \setminus (aB) = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \setminus (B \cup A_5) = (A_2 \setminus B) \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \setminus A_5 = A_2' \cup A_3 \cup A_4$$

Also stimmt auch die 1. Behauptung. Die Mengen sind zudem disjunkt, da wir lediglich eine Teilmenge von A_2 entfernt, und zu A_1 hinzugefügt sowie zwei der Mengen vereinigt, und die Mengen davor bereits disjunkt waren. □

Das scheinbar paradoxe an der Zerlegung ist, dass wir $\mathbb{F}_2$ nun in 4 Teilmengen zerlegt haben, und es genügt, an zwei davon je einen Buchstaben anzuhängen, um gewissermaßen das „Doppelte“von $\mathbb{F}_2$ zu erhalten.

3.3 Wirkung von $SO(3)$ auf die Kugeloberfläche

Sei S^2 die Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$. Wir wollen im Folgenden die Wirkung von $SO(3)$ auf S^2 untersuchen. Es ist nicht sofort klar, dass diese überhaupt existiert, da $SO(3)$ eigentlich auf den gesamten $\mathbb{R}^3$ wirkt. Allerdings wissen wir, dass Drehungen den Abstand zum Drehpunkt, also dem Ursprung, erhalten, weswegen die Kugeloberfläche als geometrischer Ort aller Punkte mit dem gleichen Abstand zum Ursprung fix ist bezüglich der Wirkung von $SO(3)$ und wir die Wirkung somit auf diese Teilmenge $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ einschränken können.

Wir wollen nun eine Untergruppe von $SO(3)$ konstruieren, die isomorph zu $\mathbb{F}_2$ ist.

Dazu bezeichnen wir eine Drehung um die x-Achse und den Winkel $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$ gegen den Uhrzeigersinn mit r_x^α, eine im Uhrzeigersinn mit $r_x^{-\alpha}$. Eine Drehung um die z-Achse und denselben Winkel α gegen den Uhrzeigersinn heiße r_z^α, eine im Uhrzeigersinn $r_z^{-\alpha}$.

Wir betrachten nun die Funktion $f : \mathbb{F}_2 \mapsto G$ mit:

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 \cdots x_n) &= r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_n \\ f(-) &= id \\ r_i &= \begin{cases} r_x^\alpha \text{ wenn } x_i = a \\ r_x^{-\alpha} \text{ wenn } x_i = a^{-1} \\ r_z^\alpha \text{ wenn } x_i = b \\ r_z^{-\alpha} \text{ wenn } x_i = b^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Klarerweise ist $G \subset SO(3)$, da f nur die Verknüpfung verschiedener Drehungen als Bild hat. Wir zeigen nun, dass f ein Homomorphismus ist:

Lemma 3.6. Definiere $f : \mathbb{F}_2 \mapsto G$ wie oben, dann ist f ein Homomorphismus.

Proof. Da G Drehungen im Raum beschreibt und somit eine Teilmenge von SO(3) ist, ergibt es Sinn, ihm dieselbe Verknüpfung zuzuschreiben, also die Hintereinanderausführung der Drehungen.

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n \circ_f y_1 y_2 \cdots y_n) = f(x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_n) = f(x_1 x_2 \cdots x_n) \circ_g f(y_1 y_2 \cdots y_n)$$

$\square$

Um zu zeigen, dass f sogar Isomorphismus ist, müssen wir zeigen, dass f bijektiv ist. Da G aber gerade die Bildmenge von $\mathbb{F}_2$ bezüglich f ist, und jede Funktion auf ihrer Bildmenge surjektiv ist, genügt es zu zeigen, dass f injektiv ist, also dass keine 2 Funktionswerte gleich sind.

Erneut genügt es hier, zu zeigen, dass das neutrale Element eindeutig ist, gilt nämlich $(r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_n) = (s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_m)$, dann folgt $id = (r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_n) \circ (s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_m)^{-1}$.

Lemma 3.7. Das Bild der Abbildung $f : \mathbb{F}_2 \mapsto G$ besitzt keine nichttriviale Identität, d.h. $f(w) \neq \mathrm{id}$ für $w \neq -$.

Proof. Den Beweis führen wir mittels Matrizen und vollständiger Induktion über die Länge der Folgen, wir stellen also zunächst die Basisrotationen als Matrizen dar:

$$r_x^{\pm\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ 0 & \pm\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad r_z^{\pm\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0 \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ziel ist es nun, zu zeigen, dass der Punkt $(0,1,0) \in S^2$ durch wiederholte Anwendungen dieser Matrix immer auf einen Punkt der Form $(\frac{a}{5^k}, \frac{b}{5^k}, \frac{c}{5^k})$ abgebildet wird, wobei $b \not\equiv 0 \mod 5$, und er insbesondere nie auf $(0,1,0)$ abgebildet wird und die Identität demzufolge eindeutig ist. Es gilt $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ sowie $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, was durch einen schnellen Abgleich am rechtwinkligen Dreieck überprüfbar ist. Wir schauen nun, was es bei der ersten Drehung (bzw. bei Wörtern der Länge 1) für mögliche Ergebnisse gibt.

$$r_x^{+\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$r_x^{-\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$r_z^{+\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_z^{-\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das dient als Induktionsanfang - nun zeigen wir, dass ein Vektor der Form $(\frac{a}{5^k}, \frac{b}{5^k}, \frac{c}{5^k})$ auch nach der Anwendung der Matrizen diese Form beibehält.

$$r_x^{\pm\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{5^k} \\ \frac{b}{5^k} \\ \frac{c}{5^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \mp\frac{4}{5} \\ 0 & \pm\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{5^k} \\ \frac{b}{5^k} \\ \frac{c}{5^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{5^k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3b}{5^{k+1}} \\ \frac{\pm 4b}{5^{k+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mp 4c}{5^{k+1}} \\ \frac{3c}{5^{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5a}{5^{k+1}} \\ \frac{3b \mp 4c}{5^{k+1}} \\ \frac{3c \pm 4b}{5^{k+1}} \end{pmatrix}$$

$$r_z^{\pm\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{5^k} \\ \frac{b}{5^k} \\ \frac{c}{5^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \mp\frac{4}{5} & 0 \\ \pm\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{5^k} \\ \frac{b}{5^k} \\ \frac{c}{5^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a}{5^k} \\ \frac{\pm 4a}{5^k} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mp 4b}{5^{k+1}} \\ \frac{3b}{5^{k+1}} \\ \text{ß} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5c}{5^{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a \mp 4b}{5^{k+1}} \\ \frac{3b \pm 4a}{5^{k+1}} \\ \frac{5c}{5^{k+1}} \end{pmatrix}$$

Nun ignorieren wir die Nenner der einzelnen Vektoreinträge und schauen uns allein die Zähler an (d.h. wir betrachten die Drehungen, als wären sie in der Form

$$\frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}{5^k}$$

- es soll nun gezeigt werden, dass b niemals durch 5 teilbar ist.

Wie oben sichtbar, werden die Variablen eines Vektors mit den Zählereinträgen a, b und c folgendermaßen durch eine Drehung durch das Wort $r_x^{\pm\alpha}$ ($= a$ oder $= a^{-1}$) verändert:

$$\begin{aligned} a &\mapsto 5a \\ b &\mapsto 3b \mp 4c \\ c &\mapsto 3c \pm 4b \end{aligned}$$

Die Drehung durch $r_z^{\pm\alpha}$ ($= b$ oder $= b^{-1}$) ergibt:

$$\begin{aligned} a &\mapsto 3a \mp 4b \\ b &\mapsto 3b \pm 4a \\ c &\mapsto 5c \end{aligned}$$

Beachte, dass dies zugleich zeigt, dass ein nichtleeres zur Identität äquivalentes Wort mindestens zwei Buchstaben enthält. Dies nutzen wir aus und stellen folgende vier Möglichkeiten für ein solches Wort w auf:

$$\begin{aligned} w &= a^{\pm 1} \circ b^{\pm 1} \circ v \\ w &= b^{\pm 1} \circ a^{\pm 1} \circ v \\ w &= a^{\pm 1} \circ a^{\pm 1} \circ v \\ w &= b^{\pm 1} \circ b^{\pm 1} \circ v \end{aligned}$$

wobei v ein beliebiges Wort ist. Sei b' das b vor der letzten Drehung und b" das vor der vorletzten Drehung (d.h. nach v). Dieselbe Notation verwenden wir für a und c. Wir dürfen induktiv annehmen, dass b' nicht durch 5 teilbar ist.

Fall 1: $w = a^{\pm 1} \circ b^{\pm 1} \circ v$

Dann gilt:

$$b = 3b' \mp 4c' \equiv 3b' \not\equiv 0 \pmod 5,$$

da $c' = 5c''$.

Fall 2: $w = b^{\pm 1} \circ a^{\pm 1} \circ v$

Dann gilt:

$$b = 3b' \pm 4a' \equiv 3b' \not\equiv 0 \pmod 5,$$

da $a' = 5a''$.

Fall 3: $w = a^{\pm 1} \circ a^{\pm 1} \circ v$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} b &= 3b' \mp 4c' = 3b' \mp (12c'' \pm 16b'') = 3b' \mp 12c'' - 16b'' \\ &= 3b' + 9b'' \mp 12c'' - 16b'' - 9b'' = 3b' + 3(3b'' \mp 4c'') - 25b'' = 6b' - 25b'' \not\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

Fall 4: $w = b^{\pm 1} \circ b^{\pm 1} \circ v$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} b &= 3b' \pm 4a' = 3b' \pm (12a'' \mp 16b'') = 3b' \pm 12a'' - 16b'' \\ &= 3b' + 9b'' \pm 12a'' - 16b'' - 9b'' = 3b' + 3(3b'' \pm 4a'') - 25b'' = 6b' - 25b'' \not\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

□

4 Das Banach-Tarski-Theorem

4.1 Wirkung von $\mathbb{F}_2$ auf die Kugeloberfläche

Im Abschnitt 3.3 wurde bereits gezeigt, dass es eine Untergruppe $G \subset SO(3)$ gibt, die isomorph zu $\mathbb{F}_2$ ist.

Wir betrachten also die Wirkung von $\mathbb{F}_2 \mapsto S^2$. Wir betrachten nun die Menge A aller Punkte in S^2, die unter Einwirkung eines nichtleeren Wortes aus $\mathbb{F}_2$ auf sich selbst abgebildet werden. Wir wollen zeigen, dass A fix bezüglich der Einwirkung von $\mathbb{F}_2 \simeq G$ ist.

Lemma 4.1. Wir betrachten die Einwirkung von $\mathbb{F}_2 \subset SO(3)$ auf S^2. Betrachte die Menge A aller Punkte, die bei Einwirkung eines nichtleeren Wortes auf sich selbst abgebildet werden. Dann ist A fix bezüglich der Einwirkung von $\mathbb{F}_2$.

Proof. Es genügt zu zeigen, dass für ein beliebiges Wort $w \in \mathbb{F}_2$ und ein $x \in A$ auch $w.x \in A$ gilt.

Angenommen, $w.x = x \in A$, dann sind wir fertig. Ansonsten gibt es ein nichtleeres $u \in \mathbb{F}_2$ mit $u.x = x$. Wir betrachten nun die Einwirkung:

$$(w \circ u \circ w^{-1}).(w.x) = (w \circ u \circ w^{-1} \circ w).x = w.(u.x) = w.x$$

d.h. $w.x$ ist fix unter Einwirkung von $w \circ u \circ w^{-1}$. Angenommen, es handelt sich hierbei um das leere Wort, dann ist $w \circ u \circ w^1 = - \Rightarrow w \circ u = w \Rightarrow u = -$, was allerdings ein Widerspruch ist, denn u war nicht das leere Wort. Also wissen wir, dass es auch für $u.x$ ein nichtleeres Wort gibt, das x auf sich selbst abbildet. □

Eine sehr wichtige Anmerkung ist, dass A abzählbar unendlich viele Elemente enthält - dies folgt daraus, dass jedes Wort bzw. jede Drehung genau zwei Punkte fix lässt (genau die, die auf der Gerade, um die gedreht wird, liegen) und dass es aber abzählbar unendlich viele Wörter gibt.

4.2 Einschränkung der Kugeloberfläche

Wie bereits in *Lemma 2.19* gezeigt, ist dann auch $S^2 \setminus A$ fix unter Einwirkung von $\mathbb{F}_2$

Wir können also die Wirkung $\mathbb{F}_2 \mapsto S^2 \setminus A$ betrachten, und für diese nach *Lemma 2.21* ein Repräsentantensystem wählen. Wir zeigen nun folgendes:

Lemma 4.2. Betrachte die Wirkung $\mathbb{F}_2 \mapsto S^2 \setminus A$, und wähle ein Repräsentantensystem M der Wirkung. Dann gibt es zu jedem $x \in S^2 \setminus A$ eindeutige $w \in \mathbb{F}_2, m \in M$ mit $w.m = x$

Das besondere an dem Lemma ist nicht, dass der Repräsentant m eindeutig bestimmt ist, dies folgt ja bereits aus der Definition von Repräsentantensystemen, sondern dass nun zusätzlich auch das Wort, mit dem man m auf x abbildet, eindeutig bestimmt ist.

Proof. Wir nehmen gegenteilig an, es gibt ein $x \in S^2 \setminus A$ und (mindestens) 2 Worte $w_1, w_2 \in \mathbb{F}_2$ sowie ein $m \in M$ mit $w_1.m = w_2.m = x$. Dann betrachten wir das Wort $w_2 \circ w_1^{-1}$. Es gilt dann

$$(w_2 \circ w_1^{-1}).x = w_2.w_1^{-1}.x = w_2.m = x$$

Das heißt, x wird auf sich selbst abgebildet. Dann folgt aber wegen $x \notin A$, dass $w_2 \circ w_1^{-1} = -$, was $w_1 = w_2$ liefert, die Worte sind also gleich, und somit existiert ein eindeutiges w. □

4.3 Aufteilung der Kugeloberfläche

Wir wollen die Kugeloberfläche nun in 5 Teilmengen zerlegen. Für eine Menge an Wörtern aus $\mathbb{F}_2$ schreiben wir kurz:

$$W.M = \{w.m \quad | \quad w \in W \wedge m \in M\}$$

Definition 4.3. Betrachte die Wirkung $\mathbb{F}_2 \mapsto S^2 \setminus A$ und ein zugehöriges Repräsentantensystem M. Dann definieren wir mit der Notation von *Definition 3.4*:

$$X_1 = A_1'.M \quad X_2 = A_2'.M \quad X_3 = A_3.M \quad X_4 = A_4.M$$

Es übertragen sich nun die Eigenschaften von *Lemma 3.5* direkt auf die Mengen der X_i:

Lemma 4.4. Es gilt mit der Wirkung $\mathbb{F}_2 \mapsto S^2 \setminus A$ und ebiger Definition der X_i:

$$a.X_2 = X_2 \cup X_3 \cup X_4$$
$$b.X_4 = X_4 \cup X_1 \cup X_2$$

Zudem sind die Mengen X_i eine Partitionierung von $S^2 \setminus A$

Proof. Die ersten zwei Aussagen folgen direkt aus der Anwendung von *Lemma 3.5* und den Axiomen der Gruppenwirkung:

$$a.X_2 = a.(A_2'.M) = (a \circ A_2').M = (A_2' \cup A_3 \cup A_4).M$$
$$b.X_4 = b.(A_4.M) = (b \circ A_4).M = (A_4 \cup A_1 \cup A_2).M$$

Dass die Mengen X_i eine Partitionierung von $S^2 \setminus A$ bilden, sieht man mithilfe von *Lemma 4.2:* Wähle zu $x \in S^2 \setminus D$ ein eindeutige $w \in \mathbb{F}_2, m \in M$ mit $w.m = x$. Dann ist x nach *Lemma 3.5* in genau einer der disjunkten Mengen A_1', A_2', A_3, A_4, und somit auch in genau einer der Mengen X_i. □

Betrachten wir also die Mengen $X_1, \cdots, X_4$, die die Kugeloberfläche (ohne die Menge D) in 4 Teile partitionieren, so können wir 2 davon rotieren und erhalten insgesamt 2 (aufeinanderliegende) Kopien der Kugel, wenn man sich *Lemma 4.4* genau anschaut, da ja die Wirkung von a auf einen Punkt im $\mathbb{R}^3$ genau eine Drehung war ($\mathbb{F}_2 \simeq G \subset SO(3)$)

4.4 Die Menge A

Wir beweisen nun das Lemma, mit dem wir die alte Aussage verbessern. Momentan wird die Kugeloberfläche bis auf abzählbar unendlich viele Punkte kopiert. Wir hätten diese Aussage aber gerne für die gesamte Kugel gezeigt.

Lemma 4.5. $S^2 \setminus A$ kann zu S^2 selbst rotiert werden.

Proof. Wähle eine Ursprungsgerade λ, die kein Punkt aus A schneidet. Dies ist möglich, da A abzählbar unendlich viele Punkte enthält und die Kugeloberfläche überabzählbar viele. Wähle J als die Menge von Winkeln, für die es $n \in \mathbb{N}$ und $P \in A$ gibt, sodass man P um λ n mal rotiert und wieder P erhält. Da diese Menge ebenfalls abzählbar viele Elemente enthält, kann ein Winkel ω gefunden werden, die nicht in ihm enthalten ist. Die Rotation um λ um den Winkel ω sei p. p ist nun eine Rotation, die auf S^2 wirkt, und keine Fixpunkte in A hat, d.h. $p^n(A)$ ist disjunkt zu A. Wir definieren $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} p^n(A)$ und betrachten das Folgende:

$$S^2 = (S^2 \setminus E) \cup E$$

Interessanterweise gilt $p(E) = E \setminus A$, sodass wir folgern, dass die obere Menge drehbar ist zu:

$$(S^2 \setminus E) \cup p(E) = (S^2 \setminus E) \cup (E \setminus A) = S^2 \setminus A$$

da $A \subseteq E$. □

4.5 Verallgemeinerung auf die gesamte Kugel

Wir können also die Oberfläche durch geschicktes Aufteilen in Teilmengen und anschließendes Rotieren in 2 identische Kopien von sich selbst überführen. Um das gleiche mit der gesamten Kugel zu machen, zeichnen wir vom Ursprung aus Strahlen zu allen Punkten auf der Kugeloberfläche. Wir rotieren nun anstatt einzelner Punkte stets die gesamten Strahlen. Damit können wir die gesamte Kugel mit Ausnahme des Mittelpunkts auf 2 identische Kopien von sich selbst abbilden. Den Mittelpunkt kriegen wir mit einem Trick auch verdoppelt - hierbei ist sogar nicht mal das Auswahlaxiom notwendig!

Lemma 4.6. Der Kreis $C_0 = \{x + iy | x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{pt\}$, wo ein Punkt fehlt, ist drehbar zu $C = \{x + iy | x^2 + y^2 = 1\}$.

Proof. Wir betrachten den Sachverhalt im Komplexen und nehmen o.B.d.A. an, dass der fehlende Punkt (1,0) ist. Wir definieren $A := \{e^{in} | n \in \mathbb{N}\}$, insbesondere $n \neq 0$, sodass $A \subseteq C$. e^{in} beschreibt eine Drehung um n rad $= \frac{n}{\pi} \cdot 180°$ im Gradmaß - damit hier zwei Elemente gleich sind müsste folgendes gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\pi} \cdot 180° &= \frac{m}{\pi} \cdot 180° - 360° \cdot k \\
n &= mn - \frac{2k}{\pi} \\
mn - n &= \frac{2k}{\pi} \\
\pi &= \frac{2k}{mn - n},
\end{aligned}$$

was ein klarer Widerspruch zur Irrationalität von π ist. Daraus folgt, dass keine zwei Punkte der Form e^{in} beim unterschiedlichem n gleich sind. Durch Drehung um 1 rad nach links von A und Stehenlassen aller Punkte in $C_0 \setminus A$ wird die Lücke geschlossen - es entsteht ein vollständiger Kreis. □

Korollar 4.7. Der Mittelpunkt ist verdoppelbar.

Proof. Sei K^3 die feste Kugel. Wähle einen Kreis $C' \subseteq K^3$, der durch den Mittelpunkt geht, ihn aber nicht enthält. $K^3 \setminus \{0\} = K^3 \setminus (C' \cup \{0\}) \cup C'$ ist somit drehbar zu

$$K^3 \setminus (C' \cup \{0\}) \cup (C' \cup \{0\}) = K^3,$$

was den Satz nun vervollständigt. □

Das Banach-Tarski-Theorem stellt somit die Legitimität des Auswahlaxioms in Frage, in dem er eine vollkommen unintuitive Folge zieht - es lässt nämlich nicht aus ZF ohne C herleiten. Eine andere Folge ist, dass es kein Maß auf alle Untermengen von $\mathbb{R}^3$ gibt, das durch Rotationen und Verschiebungen erhalten bleibt.